

Tinjauan Matematis Kriging: Aplikasi pada Distribusi Kadar Emas

Nur Ali Amri

Teknik Pertambangan UPN "Veteran" Yogyakarta, 55283 SWK 104 Condong Catur, Yogyakarta, Indonesia.
E-mail: nuraliamri@upnyk.ac.id

Abstrak – Geostatistika merupakan suatu metode dalam statistika spasial yang disajikan dalam fungsi matematika. Oleh karenanya, rumusan yang disajikan berasal dari jabaran matematika. Tulisan ini membahas jabaran matematik variogram dan teknik kriging, serta aplikasinya pada distribusi kadar emas dalam sistem vein. Berdasarkan parameter fitting variogram eskperimental *robust* serta OLS dan WLS basis eksponensial, dua kriging ordinari titik dan blok ukuran 50×50 dilaksanakan. Rata-rata estimasi kriging titik kedua model menghasilkan nilai yang hampir sama. Demikian pun untuk estimasi kriging berdasarkan cara blok, meskipun kedua model menghasilkan nilai hampir sama, tetapi rata-rata estimasi blok secara umum adalah lebih kecil dibandingkan titik. Luas kawasan mengandung distribusi kadar tinggi untuk estimasi titik juga lebih besar dibandingkan dengan estimasi blok

Kata kunci – Semivariogram, kriging ordinari titik-blok.

Abstract – *Geostatistics is a spatial statistics method presented in mathematical functions. Therefore, the formula comes from mathematical explanation. This paper discusses mathematical variogram variations, kriging technique and its application on the gold grade distribution of vein system. Based on robust experimental variogram parameters within OLS-WLS exponential base, two ordinary kriging i.e. point and block size of 50×50 are implemented. The mean point kriging estimation of both models yields almost gold grade value. Similarly, for the block kriging estimate base, although both models yield almost same value, the mean of block kriging produces, commonly, smaller area than point kriging technique. An area contains of high grade distribution based on point estimation also produces wider than block estimation area base.*

Keywords – Variogram, point-block ordinary kriging.

I. PENDAHULUAN

Statistika adalah salah satu ilmu yang bekerja berdasarkan data. Eksistensi data dideskripsikan sedemikian rupa sehingga memiliki makna dan mudah difahami. Untuk keperluan ini pendeskripsian dari sekumpulan data dilakukan. Tahapan kedua adalah, mengelola deskripsi nilai-nilai yang didapat untuk kemudian dilakukan penyimpulan atau inferensial (Dunn & Clark, 2009). Manakala geostatistika merupakan sub ilmu statistika, dimana data yang digunakan berkaitan dengan fenomena spasial (Diggle & Ribeiro, 2007). Olea (1999) menyatakan, geostatistika dalah kumpulan teknik numerik yang berhubungan dengan karakterisasi atribut spasial berdasar model acak (Olea, 1999).

Terminologi spasial dipakai untuk menggambarkan data dimana satu dengan data lainnya saling berhubungan. Oleh karenanya, Matheron (1963) memberikan istilah variabel bersangkutan sebagai variabel terregionalisasi (Cressie, 1993; Sarma, 2009). Hubungan kait ini membawa konsekuensi terjadinya perilaku distribusi yang meski tidak jarang secara lokal fluktuatif atau eratik, tetapi secara umum adalah terstruktur dan dapat dicerminkan oleh fungsi variogram (Chunsheng, 2011; Sarma, 2009). Berdasarkan pertimbangan tersebut, asumsi stasionaritas atau ergodisitas juga digunakan dalam metode geostatistika (Beckers & Bogaert, 1998).

II. METODE

Dua metode yang lazim dikenal di dalam geostatistika adalah, variogram dan kriging. Metode kriging merupakan suatu teknik estimasi nilai yang bekerja berdasarkan parameter yang diperoleh dari fitting variogram. Berdasarkan data observasi dan dengan menggunakan parameter dimaksud, teknik kriging bekerja mengestimasi suatu nilai atau data pada lokasi di sekitaran yang belum-tersampel (Matheron, 1963).

Semi-variogram

Sebagian penulis (Wackernagel, 2003; Gneiting et al., 200; Maglione & Diblasi, 2004; Lark, 2008) menyebut variogram. Sebagian lainnya (Journel & Huijbregts, 1978; Cressie, 1993; Goovaerts, 1997; Olea, R.A., 1999; Gringarten & Deutsch, 2001) menyatakan sebagai semi-variogram. Adapun Isaaks & Srivastava (1989) dan Webster & Oliver (2007) tidak mempermasalahkan kedua pengertian tersebut.

Semi-variogram adalah salah satu alat penting untuk menilai variabilitas spasial, dan parameter yang diperoleh dari fitting fungsi tersebut juga merupakan parameter penting untuk perhitungan kriging (Maglione & Diblasi, 2004). Lark (2008) menyatakan, variogram merupakan alat inti didalam analisis geostatistik, sehingga estimasi secara tepat harus dilakukan. Nilai-nilai kontaminan atau outlier

yang ekstrimakan menyebabkan perkiraan semivarians menjadi besar. Terkait hal tersebut, secara praktikal, estimator *robust* telah diusulkan Cressie (1993) dan Genton (1998) dan banyak digunakan oleh para penulis.

Hal utama yang perlu dicermati terkait variogram adalah, perilaku awal di dekat titik origin (Bachmaier & Backes, 2008). Pemahaman tentang sifat efek nugget dapat memberikan informasi penting mengenai fenomena observasi. Terkait strategi estimasi sumber daya bijih, dalam pemilihan metode penambangan dan dalam strategi pengendalian proses produksi, parameter ini memiliki implikasi yang cukup berarti (Carrasco, 2010).

Katakanlah $z(x_i)$ sebagai fungsi sinambung yang merupakan realisasi dari proses stokastik atau fungsi random $z(x_i)$ dan terdefinisi pada kawasan A ($i=1, \dots, n$). Sedangkan $z(x_i+h)$ adalah fungsi yang terletak pada jarak h dari x_i . Atas dasar hipotesis intrinsik (Richmond, 2002),

$$E\{z(x_i) - z(x_i+h)\} = 0 \quad \forall x, x+h \in A \quad (1)$$

dan untuk setiap perpindahan vektor h maka,

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{var}(z(x_i) - z(x_i+h)) \quad \forall x, x+h \in A. \quad (2)$$

Perlu diingat juga bahwa, h (dengan $|h|$) merupakan vektor yang merepresentasikan jarak antar titik x_i dengan arah θ . Manakala γ adalah notasi variogram dimana, ketika hanya bergantung pada modulus h disebut sebagai isotropik, dan merupakan anisotropik saat ia bergantung tidak hanya kepada h saja, tetapi juga kepada arah θ . Di dalam praktik, pada jarak dan toleransi sudut untuk perpindahan vektor h , bentuk semi-variogram *robust* sebagaimana (2) yang dikembangkan oleh Cressie & Hawkins (1980) berdasar teori Matheron (1960) ialah,

$$\gamma(h) = \frac{\left(\frac{1}{2|N(h)|} \sum_{i,j \in N(h)} (z(x_i) - z(x_i+h))^2 \right)^4}{0.457 + \frac{0.494}{|N(h)|} + \frac{0.045}{|N^2(h)|}}. \quad (3)$$

$|N(h)|$ adalah jumlah pasangan titik di sekitar interval h , dengan $(h) = \{(x_i, x_j) : |x_i - x_j| = h; i, j = 1, \dots, n\}$. Penyebut, sebagaimana persamaan (3) merupakan koreksi berdasarkan proses distribusi normal.

Tiga parameter utama yang didapat berdasarkan fitting semi-variogram ialah, *sill*, *nugget* dan *range*. Fitting dilakukan karena pada praktiknya variogram eksperimental, yang mula dioperasikan untuk data observasi terbatas dan berbentuk diskrit, sehingga pendekatan bentuk fungsi semi-variogram kontinu perlu dilakukan.

Persamaan semi-variogram didefinisikan sebagai *increment* varians dari $z(x_i) - z(x_i+h)$. Secara umumnya berlaku hubungan antara semi-variogram dengan kovariogram, sehingga pada kondisi stasionari, bentuk (3) dapat dipersamakan dengan (Cressie, 1993 dan Sarma, 2009)

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{var}(z(x_i) - z(x_i+h))$$

$$= \frac{1}{2} E[(z(x_i) - z(x_i+h))^2]$$

yaitu,

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (4)$$

Parameter penilaian estimasi untuk fitting variogram (eksperimental ke teoritis) dapat dilaksanakan dengan berbagai metode dua diantaranya, *ordinary least squares* (OLS) dan *weighted least squares* (WLS) sebagaimana Cressie (1985) dengan masing-masing sebagai berikut,

$$\theta_{OLS} = \text{minimum} \sum_{j=1}^J (\hat{\gamma}(h_j) - \gamma(h_j; \theta))^2 \quad (5)$$

sedangkan

$$\theta_{WLS} = \text{minimum} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\hat{\gamma}(h_j)}{\gamma(h_j; \theta)} - 1 \right)^2 N(h_j). \quad (6)$$

Variogram teori sebagaimana Oliver & Webster (2007), antara lain ialah, modelsferis atau bola (termasuk penta-sferis), sirkuler (yang juga dapat diderivasi ke dalam model Poisson atau lainnya), eksponensial, Whittle, Gaussian, Kubik, Matheron, dst. Sebagai gambaran, untuk medapatkan fungsi korelasi sferis dan variogram diberikan analogi tiga dimensional dari model sirkuler.

Volume (V) daerah perpotongan antara dua sfera di mana diameternya, a dan berpusat di h , adalah

$$V = \begin{cases} \frac{\pi}{4} c \left(\frac{2}{3} a^3 - a^3 h + \frac{1}{3} h^3 \right) & \text{untuk } h \leq a \\ 0, & \text{untuk nilai } h \text{ yang lain} \end{cases} \quad (7)$$

Dengan membagi volume sfera, $\pi a^3/6$, didapat persamaan autokorelasi yaitu,

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3, & \text{untuk } h \leq a \\ 0, & \text{untuk } h > a. \end{cases} \quad (8)$$

Dengan demikian variogramnya ialah,

$$\gamma(h) = \begin{cases} c \left\{ \frac{3h}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right\}, & \text{untuk } h \leq a \\ c, & \text{untuk } h > a, \end{cases} \quad (9)$$

dimana c dan a masing-masing adalah *sill* dan *range*, sedangkan $3c/2a$ merupakan gradien pada titik pusat (Oliver & Webster, 2007).

Kriging

Tujuan kriging adalah mengestimasi nilai variabel random, Z , pada satu atau lebih titik yang tidak disampel atau pada suatu blok dengan nilai *support* nilai $z(x_i)$ untuk masing-masing posisi titik x_i ; $i=1,$

2, ..., n. Jika $\hat{Z}(x_0)$ adalah nilai pada x_0 yang akan diprediksi berdasarkan nilai *support* $z(x_i)$, maka kriging ordinari disajikan sebagai

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n w_i z(x_i). \tag{10}$$

Pemberat $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ dan ekspektasi kesalahannya ialah, $E\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\} = 0$. Varians estimasinya ialah,

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{Z}(x_0)] &= E\{[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2\} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_i, x_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \gamma(x_i, x_j). \end{aligned} \tag{11}$$

$\gamma(x_i, x_j)$ adalah variogram Z antara titik data x_i dan x_j serta $\gamma(x_0, x_i)$ merupakan variogram antara titik data ke- i dengan titik sasaran x_0 .

Pada estimasi kriging blok (B) disajikan

$$\hat{Z}(B) = \sum_{i=1}^n w_i z(x_i). \tag{12}$$

Varians dihasilkan ialah,

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{Z}(B)] &= E\{[\hat{Z}(B) - Z(B)]^2\} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n w_i \bar{\gamma}(x_i, B) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \gamma(x_i, x_j) - \bar{\gamma}(B, B). \end{aligned} \tag{13}$$

$\bar{\gamma}(x_i, B)$ ada rata-rata variogram antara titik sampel ke- i dengan blok B. Jika $\gamma(x_i, x)$ menyatakan variogram antara titik sampel x_i dengan titik x yang menggambarkan blok B, maka

$$\bar{\gamma}(x_i, B) = \frac{1}{|B|} \int_B \gamma(x_i, x) dx. \tag{14}$$

Sedangkan

$$\bar{\gamma}(B, B) = \frac{1}{|B|^2} \int_B \int_B \gamma(x, x') dx dx', \tag{15}$$

dimana $\gamma(x, x')$ menyatakan variogram antara titik-titik x dan x' yang berlaku secara independen pada blok B (Oliver & Webster, 2007).

III. STUDI KASUS

Studi kasus berlaku pada kawasan emas vein Ciurug milik UBPE Pongkor (Tbk) di mana 128 *support* data digunakan (Amri et al., 2017). Berdasarkan fitting variogram OLS dan WLS basis eksponensial yang masing-masing modelnya ditandakan dengan OLSE dan WLSE, didapat parameter sebagaimana Tabel 1.

Tabel 1. Parameter hasil fitting semivariogram model OLSE dan WLSE

Model	Nugget	Sill (c)	IC	Range (a)
OLSE	0	11.39	0	179.88
WLSE	0	11.30	0	178.03

Tampak dari kedua model sebagaimana Tabel 1, didapatkan tiga parameter semi-variogram hasil fitting OLSE dan WLSE, yang nilainya relatif sama. Kedua model menghasilkan *nugget* nol, *sill* masing-masing ialah, 11,39 (OLSE) dan 11,30 (WLSE). Adapun *range* untuk OLSE yaitu, 179,88 atau sedikit lebih panjang dibandingkan dengan model WLSE yaitu, 178,03. Cambardella dan Karlen (1999) sebagaimana Santesteban et al. (2012) menyatakan bahwa, untuk IC < 25 berarti berlaku korelasi ruang yang kuat. Sebagaimana kolom empat, kedua model menghasilkan indeks Cambardella (IC) nol, yang berarti bahwa korelasi ruangnya kuat.

Merujuk pada ketiga-tiga parameter sebagaimana Tabel 1, dihasilkan kriging ordinari titik dan blok sebagaimana dipamerkan pada Tabel 2. Teknik kriging mendasarkan kepada 6150 titik *support*. Sebagaimana baris satu kolom dua dan empat Tabel 2, diperoleh rata-rata estimasi kriging titik, 4,96. Sedangkan berdasarkan kriging ordinari blok dengan ukuran 50×50, sebagaimana baris satu kolom tiga dan lima, rata-rata untuk masing-masing model ialah, 4,81 dan 4,82.

Tabel 2. Rata-rata dan luas kawasan berdasar kriging titik dan blok basis model OLSE dan WLSE

Parameter	Model			
	OLSE		WLSE	
	Kriging titik	Kriging blok	Kriging titik	Kriging blok
Rata-rata	4,96	4,81	4,96	4,82
Luasan kawasan (%) yang mengandung kadar emas				
≥ 3,0 (g/t)	85,28	86,02	85,42	86,38
≥ 10,0 (g/t)	5,17	3,58	5,35	3,58

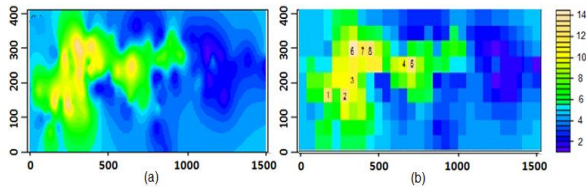
^{a)} Kriging blok ukuran 50×50

Luas sebaran estimasi pada kawasan merujuk minimum kadar emas 3,0 dan kadar minimum 10,0 (dalam satuan g/t). Sebagaimana baris empat kolom dua empat dihasilkan, luas kawasan mengikut estimasi titik yang mengandung kadar minimum 3,0 ialah, seluas 85,28% (untuk OLSE). Sedangkan berdasarkan WLSE dihasilkan 85,42% kawasan yang mengandung kadar minimum 3,0. Pada kasus blok hanya terpaut sedikit dimana, basis OLSE menghasilkan 86,02% kawasan mengandung sebaran emas dengan kadar minimum 3,0. Sementara 86,38% kawasan dihasilkan berdasarkan fitting WLSE.

Kawasan mengandung kadar tinggi (≥10,0 g/t) berdasarkan estimasi titik basis OLSE dan WLSE, masing-masing ialah, 5,17 dan 5,35 persen. Sedangkan untuk estimasi blok, sedikit lebih sempit. Sebagaimana kolom tiga dan lima baris empat, kedua model menghasilkan 3,58% kawasan yang mengandung kadar tinggi.

Sebagai ilustrasi ditampilkan sebaran kadar hasil estimasi kriging ordinari titik dan blok ukuran 50×50, keduanya berdasar WLSE. Gambar 1(a) merupakan sebaran emas hasil estimasi kriging ordinari titik,

sedangkan Gambar 1(b) adalah sebaran berdasarkan blok kriging 50×50.



Gambar 1. Sebaran emas berbagai kadar (a) berdasar estimasi kriging titik, dan (b) kriging blok 50×50

Sebagai informasi, berdasarkan estimasi blok sebagaimana kolom tiga Tabel 3, terdapat delapan blok mengandung emas kadar lebih dari 10 g/t. Masing-masing blok berpusat pada pusat koordinat, sebagaimana dipaparkan pada kolom dua. Nomor blok menggambarkan letak sebagaimana pada Gambar 1(b). Sebagaimana enam kolom tiga, estimasi yang menghasilkan kadar paling tinggi, 12,951 g/t terletak pada blok 6, berpusat pada (300, 300).

Tabel 3. Posisi blok, pusat koordinat dan rata-rata estimasi emas kadar tinggi

Nomor Blok	Pusat Koordinat	Rata-rata estimasi
1	(150, 150)	10.758
2	(250, 150)	11.472
3	(300, 200)	10.291
4	(600, 250)	10.936
5	(650, 250)	11.820
6	(300, 300)	12.951
7	(350, 300)	10.922
8	(400, 300)	11.009

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih kepada manajemen PT. Aneka Tambang (Tbk), khususnya UBPE Pongkor, Indonesia yang telah memberikan data untuk penelitian ini. Terimakasih juga disampaikan kepada Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Yogyakarta yang telah memberikan kesempatan penulis melakukan penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

Amri, N.A., Abdul Aziz, J. & Fudholi, A. 2016. Consistency of the semivariogram-fitting error on ordinary kriging prediction. *Journal of Engineering and Applied Sciences* 4(12): 990–995.

Bachmaier, M. & Backes, M. 2008. Variogram or semivariogram? Understanding the variances in a variogram, *Journal of Precision Agric* (9):173–175.

Beckers, F. & Bogaert, P. 1998. Nonstationarity of the Mean and Unbiased Variogram Estimation: Extension of the Weighted Least-Squares

Method. *Journal of Mathematical Geology* 30 (2): 223 – 240.

Cambardella, C.A. & Karlen, D.L. 1999. Spatial analysis of soil fertility parameters. *Journal of Precision Agriculture* (1): 5 – 14.

Carrasco, P.C. 2010. Nugget effect, artificial or natural?. *The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy.* (110): 299 – 305.

Chunsheng, Ma. 2011. A Class of Variogram Matrices for Vector Random Fields in Space and/or Time. *Journal of Math Geosci* (43): 229–242.

Cressie, N. 1993. *Statistics for Spatial Data.* John Wiley & Sons, New York.

Dunn, O.J.& Clark, V.A. 2009. *Basic Statistics: A Primer for the Biomedical Sciences.* John Wiley & Sons, New Jersey.

Diggle, P.J.& Paulo J. Ribeiro Jr., P.J. 2007. *Model-based Geostatistics.* Springer Science +Business Media, LLC, New York.

Emery, X. 2007. Reducing fluctuations in the sample variogram. *Stoch Environ Res Ris Assess Journal* 21: 391–403.

Genton, M.G. 1998. Variogram fitting by generalized Least Squares using an explicit formula for the covariance structure. *International Journal of Association for Mathematical Geology* 30 (4): 127-137.

Gneiting, T., Sasva’ri, Z., & Schlather, M. 2001. Analogies and correspondences between variograms and covariance functions. *Journal of Advances in Applied Probability* 33: 617–630.

Goovaerts, P. 1997. *Geostatistics for natural resources evaluation.* New York: Oxford University Press.

Gringarten, E. & Deutsch, C.V. 2001. Teacher’s aide variogram interpretation and modeling. *Journal of International Association for Mathematical Geology* 33 (4): 507-534.

Isaaks, E.H. & Srivastava, R.M. 1989. *Applied geostatistics.* New York: Oxford University Press.

Journel, A.G. & Huijbregts, C.J. 1978. *Mining geostatistics.* New York: Academic Press.

Lark, R.M. 2008. Some result on the spatial breakdown point of robust point estimates of the variogram. *International Journal of Mathematical Geosciences* 40: 729-75.

Maglione, D.S. & Diblasi, A.M. 2004. Exploring a valid model for the variogram of an isotropic spatial process. *New York: Springer-Verlag, Stoch Environ Res Risk Assess* 18: 366-376.

Matheron, G. 1963. Principles of geostatistics. *Journal of Economic Geology* 58: 1246-1266.

Olea, R.A. 1999. *Geostatistics for engineers and earth scientists,* London: Kluwer Academic Publishers.

Santesteban, L.G., Guillaume, S., Royo, J.B., Tisseyre, B. 2012. Are precision agriculture

tools and methods relevant at the whole-vineyard scale? *Journal of Precision Agriculture*. DOI 10.1007/s11119-012-9268-3.

Sarma, D.D. 2009. *Geostatistics with applications in earth sciences*. Second edition. Springer, New Delhi.

Wackernagel, H. 2003. *Multivariate geostatistics: an introduction with applications*. Springer-Verlag, Third ed., completely revised edition, New York.

Webster, R. & Oliver, M.A. 2007. *Geostatistics for environmental scientists*. Second Edition. England: John Wiley & Sons Ltd.

LAMPIRAN

Bukti Kriging Cara Variogram Dan Kriging

Katakanlah, $Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))'$ merupakan vektor sampel data ruang pada lokasi x_1, x_2, \dots, x_n . Berdasar data tersebut akan diramal nilai $z(x_0)$ yang terletak pada x_0 .

Teknik Kriging adalah meminimumkan varians estimasi pada x_0 , ialah

$$\begin{aligned} \text{minimum } \hat{\sigma}_R^2(x_0) &= E[Z(x_0) - \hat{Z}(x_0)]^2 \\ &= E \left[Z(x_0) - \sum_{i=1}^n w_i Z(x_i) \right]^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Untuk proses intrinsik stasioner, rumus (16) ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_R^2(x_0) &= 2 \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_0 - x_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \gamma(x_i - x_j) \end{aligned} \tag{17}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \left(Z(x_0) - \sum_{i=1}^n w_i Z(x_i) \right)^2 &= \\ Z^2(x_0) - 2Z(x_0) \sum_{i=1}^n w_i Z(x_i) & \\ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Z(x_i) Z(x_j) &= \\ \sum_{i=1}^n w_i Z^2(x_0) - 2Z(x_0) \sum_{i=1}^n w_i Z(x_i) & \\ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Z(x_i) Z(x_j) & \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i Z^2(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j Z^2(x_j) + \sum_{i=1}^n w_i Z^2(x_i) & \\ = & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j [Z(x_i) - Z(x_j)]^2 & \\ + \sum_{i=1}^n w_i [Z(x_0) - Z(x_i)]^2 &= \end{aligned}$$

Apabila ekspektasi berlaku untuk persamaan terakhir, maka

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j E[Z(x_i) - Z(x_j)]^2 & \\ + \sum_{i=1}^n w_i E[Z(x_0) - Z(x_i)]^2 &= \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Var}[Z(x_i) - Z(x_j)] & \\ + \sum_{i=1}^n w_i \text{Var}[Z(x_0) - Z(x_i)]. & \end{aligned}$$

Oleh kerana $\text{var}[Z(x_i) - Z(x_j)] = 2\gamma(\cdot)$ merupakan definisi variogram, bentuk terakhir adalah

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j 2\gamma(x_i - x_j) + \sum_{i=1}^n w_i 2\gamma(x_0 - x_i) & \\ = & \\ 2 \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_0 - x_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \gamma(x_i - x_j). & \end{aligned}$$

Dengan demikian kriging sebagaimana (16) adalah meminimumkan

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_R^2(x_0) &= E \left[Z(x_0) - \sum_{i=1}^n w_i Z(x_i) \right]^2 = \\ 2 \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_0 - x_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \gamma(x_i - x_j), & \end{aligned}$$

dengan batasan

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Oleh karenanya kriging adalah

$$\begin{aligned} \text{minimum } 2 \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_0 - x_i) &= \\ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \gamma(x_i - x_j) - 2\lambda \sum_{i=1}^n (w_i - 1) & \tag{18} \end{aligned}$$

λ merupakan pekali Lagrange. Dengan mendiferensialkan (18) kepada masing-masing pemberat w_1, w_2, \dots, w_n dan λ dan di mana kumpulan derivatif sama dengan nol didapat

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^n w_j \gamma(x_i - x_j) + \gamma(x_0 - x_i) - \lambda &= 0, \tag{19} \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

dan

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Menggunakan operasi matriks

$$\tilde{\gamma} = \Gamma \tilde{w} \tag{20}$$

dengan

$$\tilde{\gamma}' = (\gamma(x_0 - x_1), \gamma(x_0 - x_2), \dots, \gamma(x_0 - x_n), 1)$$

$$\Gamma = \begin{cases} \gamma(x_i - x_j), & i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n, \\ 1, & i = n + 1; j = 1, \dots, n, \\ 1, & j = n + 1; i = 1, \dots, n, \\ 0, & i = n + 1; j = n + 1. \end{cases}$$

$$\tilde{w}' = (w_1, w_2, \dots, w_n, \lambda)$$

dan

$$\tilde{w} = \Gamma^{-1} \tilde{\gamma}. \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma(x_1, x_0) \\ \gamma(x_2, x_0) \\ \vdots \\ \gamma(x_n, x_0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x_0 - x_1) \\ \gamma(x_0 - x_2) \\ \vdots \\ \gamma(x_0 - x_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(x_1 - x_1) & \gamma(x_1 - x_2) & \dots & \gamma(x_1 - x_n) & 1 \\ \gamma(x_2 - x_1) & \gamma(x_2 - x_2) & \dots & \gamma(x_2 - x_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(x_n - x_1) & \gamma(x_n - x_2) & \dots & \gamma(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Digandakan dengan w_i dan dijumlahkan untuk semua $i=1, \dots, n$ didapat

$$-\sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n w_j \gamma(x_i - x_j) + \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_0 - x_i) - \sum_{i=1}^n w_i \lambda = 0.$$

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \gamma(x_i - x_j) + \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_0 - x_i) - \sum_{i=1}^n w_i \lambda = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \gamma(x_i - x_j) = \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_0 - x_i) - \sum_{i=1}^n w_i \lambda = 0.$$

Substitusi untuk rumus (17) didapat

$$\hat{\sigma}_R^2(x_0) = \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x_0 - x_i) + \lambda \tag{22}$$

di mana $\hat{\sigma}_R^2(x_0)$ adalah varians estimasi pada titik x_0 berdasarkan titik estimasi x_i .