

Impak Fitting Model Semivariogram pada Perhitungan Range

Nur Ali Amri
nuraliamri@yahoo.com

Abstract

Semivariogram is a visualization of the geostatistical variance parameters, while fitting semivariogram is one of important factor in determining the effect of range or influence distance between sample points, which is in the mining industry useful for the estimation of mineral reserves. Based on calculation of gold grades distributions, obtained that the robust semivariogram method is better than the classical method. Range based on fitting (OLS and WLS) robust method also produces longer or better of distances influence. Nonetheless, implicitly, the robust semivariogram OLS fitting model is still better than WLS model. This applies to both the exponential and spherical models.

Abstrak

Semivariogram merupakan visualisasi parameter variance pada geostatistik, sedangkan fitting semivariogram adalah salah satu factor penting dalam penentuan range atau jarak pengaruh antar titik-titik sampel, yang di dalam industry pertambangan berguna dalam estimasi cadangan bahan galian. Berdasarkan hasil perhitungan terhadap sebaran kadar emas ini diperoleh informasi bahwa semivariogram dengan metode robust lebih baik dibandingkan metode classical. Range berdasarkan fitting (OLS dan WLS) metode robust juga menghasilkan jarak pengaruh yang lebih panjang atau lebih baik. Meskipun demikian, secara implicit, metode robust fitting semivariogram model OLS lebih baik dibandingkan model WLS. Kejadian ini berlaku baik pada model exponential maupun spherical.

1. Pendahuluan

Salah satu tujuan utama dari penggunaan geostatistik di dalam industry pertambangan adalah menghitung cadangan, dalam hal ini didasarkan pada estimasi kriging. Operasional kriging, bagaimanapun, sangat bergantung kepada variografi dimana parameter-parameter utama yang dihasilkan mencakup nugget, sill dan range. Ketiga parameter-parameter tersebut diperoleh melalui fitting variogram eksperimental kepada variogram teoritikal.

Dua cara metode fitting yang lazim digunakan dalam variografi adalah manual (atau pengamatan mata) dan otomatis. Tulisan ini menitik beratkan kepada automatical fitting dengan least squares, khususnya ordinary least squares (OLS) dan weighted least squares (WLS) dengan dua model utama variogram teoritikal, yaitu spherical dan exponential untuk memperoleh range yang tepat. Kasus yang digunakan ialah sebaran emas di salah satu lokasi di wilayah Ciurug, milik PT. Aneka Tambang UPBE Pongkor.

Range merupakan jarak maksimum suatu titik observasi berpengaruh terhadap sekitarnya. Di dalam geologi pertambangan, terutamanya sebaran emas, parameter ini sangat krusial karena akan menentukan akurasi jarak pengaruh yang boleh jadi digunakan pada rekomendasi pengambilan sampel baru (biasanya dilakukan dengan pemboran).



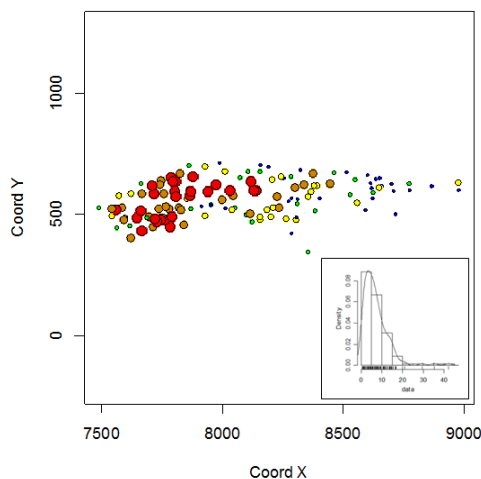
2. Material dan Metode

Lokasi dan sebaran data

Kertas ini mengkaji sebaran kadar assay emas yang diambil dari 138 titik-titik bor (Gambar1) pada quartz vein di kawasan Ciurug, yang merupakan wilayah milik PT. Aneka Tambang UBPE Pongkor, Bogor, Indonesia. Sebaran titik-titik bor sebagaimana pada Gambar 1 menunjukkan bahwa kadar tinggi atau zona kaya, sebagaimana ditunjukkan dengan lingkaran yang lebih besar dengan warna tegas, mengelompok pada hampir separoh sisi kiri. Sedangkan pada sisi kanan merupakan zona relative “miskin” dengan titik-titik bor yang lebih sedikit dibandingkan zona kaya.

Grafik density sebagaimana Gambar 1 menunjukkan terjadinya skewed yang menunjukkan keeratikan data, sebagaimana lazimnya pada sebaran emas primer. Sampel-sampel eratik (outlier) pada tahap ini sengaja dibiarkan dalam perhitungan, dalam rangka melakukan komparasi penggunaan pada model semivariogram eksperimental (classical dan robust) dan fitting semivariogram yang mencakup ordinary least squares dan weighted least squares.

Sebagaimana umumnya di industry pertambangan, semivariogram teoritik yang digunakan adalah model exponential dan model spherical. Hasil fitting terbaik (terutama sill dan range) pada model ini digunakan sebagai dasar (asas) dalam perhitungan estimasi kriging.



Gambar 1 Sebaran Grid Emas berdasar Titik Bor (semakin besar lingkaran/ berwarna tegas menunjukkan semakin besar kadar)

Beberapa langkah penting dalam metode ini antara lain adalah, memperoleh semivariogram (baikpun numerical maupun grafik) berdasarkan formula classical semivariogram dan robust semivariogram. Kedua semivariogram tersebut, kemudian dicocokkan (fitted) dengan automatic fitting berdasarkan Ordinary Least Squares (OLS) dan Weighted Least Squares (WLS).

Range (dan parameter variogram lain, nugget dan sill) yang menggunakan status omnidirectional digunakan sebagai dasar perhitungan estimasi. Eksekusi data pada penyelidikan ini menggunakan open source R package dengan basis library geoR.

Semivariogram eksperimental

Andaikan kadar (grade) dari badan bijih pada titik \mathbf{s} (di dalam R^2) merupakan suatu realisasi dari proses random $\{Z(\mathbf{s}); \mathbf{s} \in D\}$ yang diamati pada titik-titik tertentu $\{\mathbf{s}_i; i = 1, \dots, n\}$ dan $\mathbf{h} = \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$, maka estimator classical untuk semivariogram didefinisikan (Matheron, 1962),

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)]^2$$

Dilatarbelakangi oleh pemikiran bahwa estimator classical sangat dipengaruhi oleh pengamatan atipikal, Cressie dan Hawkins (1980) kemudian melakukan transformasi Box & Cox (1964). Dengan asumsi normalitas dan distribusi chi-kuadrat akar pangkat empat dari $(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))^2$ membuat estimator semivariogram yang diberi notasi $\bar{\gamma}(\mathbf{h})$ ini lebih kuat (robust). Estimator robust tersebut disajikan sebagai

$$\bar{\gamma}(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)]^{1/2} \right)^4 / \left(0.457 + \frac{0.494}{|N(\mathbf{h})|} \right).$$

dimana jumlahan $N(\mathbf{h}) \equiv \{(i, j); \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j = \mathbf{h}\}$ dan $|N(\mathbf{h})|$ merupakan pasangan titik-titik sampel (*pair*) yang dipisahkan pada jarak \mathbf{h} .

Semivariogram teoritikal

Kedua semivariogram di atas merupakan semivariogram eksperimental yang dalam perjalanannya (untuk memperoleh parameter-parameter, terutama sill dan range) perlu dilakukan fitting dengan semivariogram teoritikal. Dua model semivariogram yang digunakan di dalam paper ini adalah,

1. Spherical model

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{h} = 0 \\ C_0 + C[(3/2)(|\mathbf{h}|/a) - (1/2)(|\mathbf{h}|/a)^3], & 0 < |\mathbf{h}| \leq a \\ C_0 + C, & |\mathbf{h}| \geq a \end{cases}$$

2. Exponential model

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{h} = 0 \\ C_0 + C[1 - \exp(-|\mathbf{h}|/a)], & \mathbf{h} \neq 0 \end{cases}$$

Fitting semivariogram

Model fitting yang juga sering digunakan adalah *least squares* dimana estimasi semivariogram dilakukan dengan meminimumkan jumlah perbedaan kuadrat dari $R(\theta)$

$$R(\theta) = \sum_{i=1}^k w_i^2 [\gamma_z^*(\mathbf{h}_i) - \gamma_z(\mathbf{h}_i; \theta)]^2 \text{ yaitu,}$$

$$\min \sum_{i=1}^k w_i^2 [\gamma_z^*(\mathbf{h}_i) - \gamma_z(\mathbf{h}_i; \theta)]^2.$$

Fitting jenis ini antara lain ordinary least squares (OLS), dimana estimasinya menggunakan formula

$$R(\theta)_{OLS} = \sum_{i=1}^k [\gamma_z^*(\mathbf{h}_i) - \gamma_z(\mathbf{h}_i; \theta)]^2$$

$$\min \sum_{i=1}^k [\gamma_z^*(\mathbf{h}_i) - \gamma_z(\mathbf{h}_i; \theta)]^2.$$

Sedangkan untuk weighted least squares (WLS) estimasi semivariogram menggunakan

$$R(\theta)_{WLS} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\frac{2\gamma(\mathbf{h}_i; \theta)^2}{N(\mathbf{h}_i)}} [\gamma_z^*(\mathbf{h}_i) - \gamma_z(\mathbf{h}_i; \theta)]^2 = \sum_{i=1}^k N(\mathbf{h}_i) \left[\frac{\gamma_z^*(\mathbf{h}_i)}{\gamma_z(\mathbf{h}_i; \theta)} - 1 \right]^2 \text{ dengan}$$

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k N(\mathbf{h}_i) \left[\frac{\gamma_z^*(\mathbf{h}_i)}{\gamma_z(\mathbf{h}_i; \theta)} - 1 \right]^2$$

Pada kasus classical, $\gamma_z^*(\cdot) = \hat{\gamma}(\cdot)$ sedangkan untuk kasus robust $\gamma_z^*(\cdot) = \bar{\gamma}(\cdot)$.

Range (practical) adalah jarak maksimum ketika semivariogram mencapai sill, atau secara matematik ditulis $\lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow \infty} \gamma(|\mathbf{h}|) = \gamma_\infty < \infty$.

3. Diskusi

Semivariogram

Perhitungan didasarkan pada asumsi omnidirectional, maknanya semivariogram sama pada berbagai arah. Tabel 1 menyajikan nilai-nilai semivariogram omnidirectional dengan jarak (lag) teratur setiap 100 m pada absis antara 7500 sehingga 9000. Secara umum terlihat bahwa model robust menghasilkan nilai-nilai semivariogram yang lebih kecil (atau lebih baik) dibandingkan dengan metode classical.

Jumlah pasangan titik (pairs) yang semakin kecil lebih disebabkan oleh banyaknya data, dimana semakin ke kanan menjadi semakin sedikit (dibandingkan sisi sebelah kiri, sekitar absis 7500 – 8250).

Tabel 1 Omnidirectional Semivariogram Model Classical dan Robust

Lag Dist	Classical		Robust	
	Semivariogram*	Pairs	Semivariogram*	Pairs
0	20.2009	228	11.2368	228
100	31.6134	1361	18.7594	1361
200	35.8524	1540	21.4820	1540
300	30.2789	1268	19.8783	1268
400	31.5002	1114	21.0602	1114

500	42.6662	981	29.5125	981
600	47.3042	840	30.6192	840
700	38.7292	629	23.8864	629
800	46.2893	514	36.8325	514
900	72.7232	370	63.7272	370
1000	66.1483	280	51.1714	280
1100	58.0729	170	44.1763	170
1200	59.5987	94	55.8303	94
1300	66.6048	39	44.2586	39
1400	16.5173	23	15.8729	23
1500	2.44872	2	1.5134	2

*(g/t)² Au.

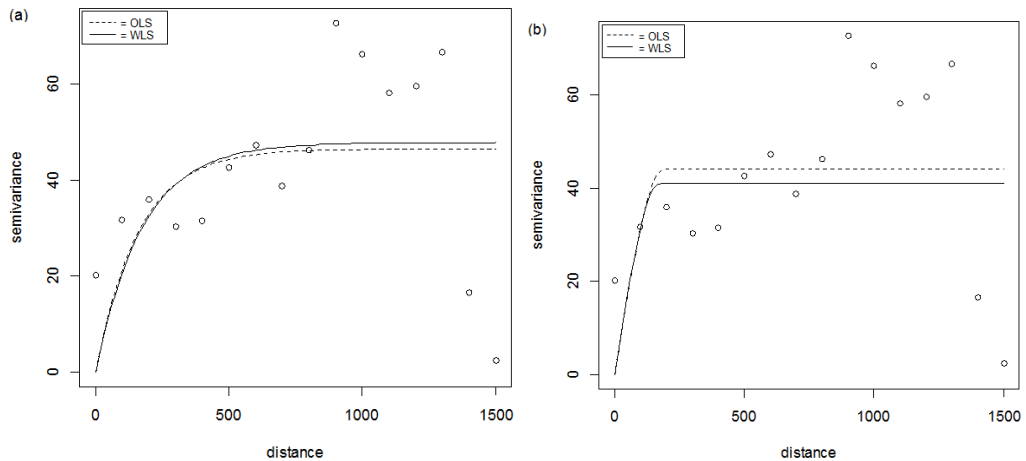
Fitting Semivariogram

Fitting semivariogram eksperimental dilakukan untuk memperoleh (utamanya) sill dan range, yang pada penyelidikan ini dilakukan terhadap model exponential dan spherical. Berdasarkan Tabel 2, fitting semivariogram robust menggunakan ordinary least squares (OLS) menghasilkan sill yang lebih kecil (atau boleh dikata lebih baik) dibandingkan dengan weighted least squares fitting (WLS). Hal ini terjadi pada kedua model, yaitu exponential dan spherical. Jarak pengaruh antar titik-titik sample (range) juga lebih besar (atau lebih panjang/luas) dibandingkan dengan jarak pengaruh (range) antar titik-titik sampel pada keseluruhan semivariogram classical.

Tabel 2 Parameter Semivariogram Classical dan Robust

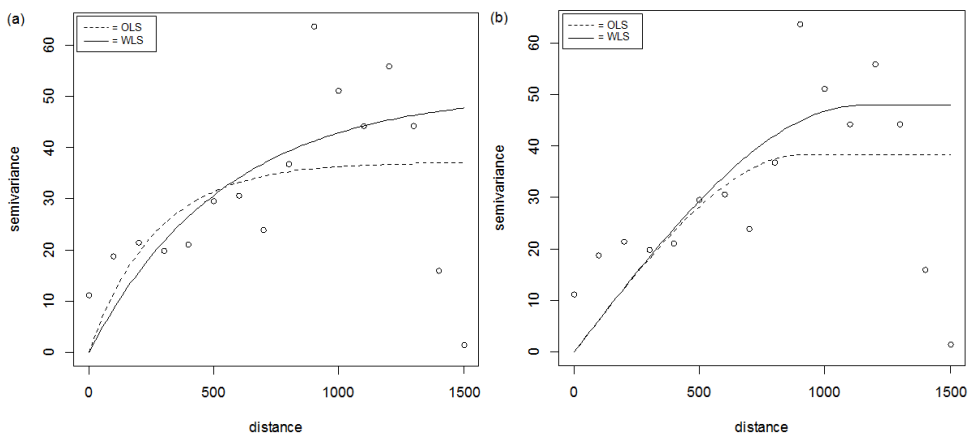
	Classical		Robust	
	OLS	WLS	OLS	WLS
<i>Exponential</i>				
Sill	46.4174	47.7480	37.1690	50.9362
Pract. Range	482.3617	525.8793	799.8702	1622.5230
<i>Spherical</i>				
Sill	43.9096	40.9878	38.4487	47.8651
Pract. Range	188.8761	172.7595	920.3455	1143.7160

Grafik hasil fitting semivariogram, baikpun menggunakan OLS maupun WLS dapat dilihat pada Gambar 2 dan Gambar 3. Pada Gambar 2 ditampilkan semivariogram model classical, dimana (a) merupakan visualisasi semivariogram classical model exponential dan (b) adalah model spherical.



Gambar 2 Semivariogram Classical (a) Exponential Model dan (b) Spherical Model

Sill WLS semivariogram classical pada model exponential (Gambar 2 (a)) terlihat lebih besar dibandingkan dengan hasil fitting OLS. Sebaliknya, fitting WLS untuk semivariogram classical menghasilkan sill yang lebih kecil dibandingkan fitting OLS (Gambar 2 (b)).



Gambar 3 Semivariogram Robust (a) Exponential Model dan (b) Spherical Model

Gambar 3 menampilkan semivariogram model robust, dimana (a) merupakan visualisasi semivariogram untuk model exponential, sedangkan (b) adalah model spherical. Range hasil fitting semivariogram robust untuk model WLS lebih panjang dibandingkan dengan OLS. Meski demikian sill semivariogram robust untuk model exponential dan spherical untuk OLS lebih kecil dibandingkan dengan fitting WLS.

4. Simpulan

1. Secara umum semivariogram robust memberikan hasil perhitungan yang lebih baik dibandingkan dengan model classical.
2. Pada model semivariogram robust, fitting menggunakan OLS memberikan sill yang lebih kecil dibandingkan hasil fitting dengan WLS.

3. Jika dilihat dari jarak pengaruh antar titik-titik sampel, perhitungan semivariogram dengan metode robust menghasilkan range yang lebih baik. Fakta ini dapat dijadikan sebagai rujukan bagi rekomendasi perlu atau tidaknya penambahan sampel baru. Tetapi secara praktikal, terutama pada perhitungan kriging, kondisi semacam ini menjadi relative untuk dijadikan atau diabaikannya pada pertimbangan estimasi.

Ucapan Terimakasih

Terimakasih kepada PT. Aneka Tambang UBPE Pongkor, khususnya Ir. Rustaman, Or. Yoseph dan Ir. Kristiawan yang telah memberikan fasilitasi ke perusahaan untuk memperoleh data sebagai bagian dari penyelidikan ini.

5. Daftar Pustaka

- Bachmaier, M. & Backes, M. 2008. Variogram or semivariogram? Understanding the variances in a variogram. New York: Springer Series in Statistics, Springer Science + Business Media, LLC. 9: 173-175.
- Bivand, R.S., Pebesma, E.J. & Rubio, V.G. 2008. *Applied spatial data analysis with R*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.
- Carrasco, P.C. 2010. Nugget effect, artificial or natural? *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 110 (June): 299-305.
- Clark, I. 2010. Statistics or geostatistics? Sampling error or nugget effect? *International Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 110 (2): 307-312.
- Crawley, M.J. 2007. *The R Book*. England: John Wiley & Sons, Ltd.
- Cressie, N. 1993. *Statistics for spatial data*. New York. Chichester. Toronto. Brisbane. Singapore: John Wiley & Sons, Inc.
- Jabro, J.D., Stevens, B.W. & Evans, R.G. 2006. Spatial relationships among soil physical properties in a grass-alfalfa hay field. *Journal of Soil Science* 171 (9): 719-727.
- Maglione, D.S. & Diblasi, A.M. 2004. Exploring a valid model for the variogram of an isotropic spatial process. *New York: Springer-Verlag, Stoch Environ Res Risk Assess* 18: 366-376.
- Matheron, G. 1963. Principles of geostatistics. *Journal of Economic Geology* 58: 1246-1266.
- Schabenberger, O. & Gotway, C.A. 2005. *Statistical methods for spatial data analysis*. Boca Raton London New York: Chapman & Hall/CRC.